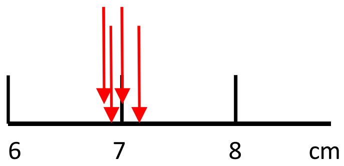
PdF, laboratori 2019 - Valutazione delle incertezze – in pratica
[questa è una trattazione molto semplificata in cui non si considera l'elaborazione statistica, come andrebbe fatto]

Quando si fanno una o più misure ripetute della stessa grandezza posso avere due casi:

A) Le misure coincidono entro le incertezze dovute agli strumenti di misura. Cioè si vede ad occhio che viene sempre la stessa misura. In questo caso l'incertezza è data dalla sensibilità dello strumento: $\Delta x = D/2$ dove D è la più piccola divisione dello strumento.



Nel caso a sinistra per esempio la misura di lunghezza avrà:
$\Delta x = D/2 = 1$ cm/2= 0,5 cm, e scriverò: $x \pm \Delta x \rightarrow 7{,}0 \pm 0{,}5$ cm

B) Le misure cadono al di fuori dell'incertezza dello strumento. È il caso per esempio delle misure di tempo fatte con il cronometro digitale a mano. Il LSD è 0,01 s, ma è chiaro che ripetendo le misure queste saranno influenzate dai riflessi di chi esegue la misura. In questo caso il valore sarà dato dalla media aritmetica dei vari valori e l'incertezza si può calcolare (in modo molto approssimato) facendo (il valore massimo – il valore minimo)/2. Esempio: se le misure di un certo tempo fossero: (5,65 5,78 5,44 5,50)s.
Allora la misura di tempo sarebbe: T= (5,65+5,78+5,44+5,50)/4=5,5925 s l'incertezza ΔT=(5,78-5,44)/2=0,17 s (30-40 volte più grande dell'incertezza dello strumento=LSD=0,01 s) e il risultato si scriverebbe: $T \pm \Delta T$ =5,59 $\pm$ 0,17 s .

Incertezze degli strumenti utilizzati nei due laboratori

L1 – densità

- Bilancia (per la misura della massa m): LSD = 0,001 g Δm= 3 ·LSD= 0,003 g (letto dal manuale).
- Calibro (per la misura dell'altezza h): Δh=D(non D/2, il calibro è particolare)=1/20 mm= 0,05 mm.
- Palmer (per la misura del diametro ϕ): $\Delta\phi$=D/2=0,01/2 mm= 0,005 mm.

Quindi le tre misure dirette forniranno i valori: $m\pm\Delta m$; $h\pm\Delta h$; $\phi\pm\Delta\phi$.

La densità è: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot h} = \frac{4m}{\pi \phi^2 h}$

L'incertezza $\Delta\rho$ sulla densità si calcolerà così: l'incertezza relativa $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ è: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta\phi}{\phi} + \frac{\Delta h}{h}$; dove $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ deve essere tale da risultare molto minore della somma di tutti gli altri contributi.

Esempio numerico:

Supponiamo di avere: $m\pm\Delta m$ = 33, 1520 $\pm$ 0,0005 g ; $\phi\pm\Delta\phi$ = 14, 150 $\pm$ 0,005 mm ; $h\pm\Delta h$ = 77,53 $\pm$ 0,05 mm.

Calcolo l'incertezza relativa (nota che è un numero adimensionale…le unità di misura non contano):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{0{,}0005}{33{,}1520} + 2\frac{0{,}005}{14{,}150} + \frac{0{,}05}{77{,}53} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + 1{,}51 \cdot 10^{-5} + 6{,}90\ \cdot 10^{-4} + 5{,}16 \cdot 10^{-4} \cong \frac{\Delta\pi}{\pi} + 1{,}22 \cdot 10^{-3}$$

Per trascurare $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ dovrò avere $\frac{\Delta\pi}{\pi} \ll 1{,}22 \cdot 10^{-3}$, quindi $\Delta\pi \ll 1{,}22 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$, cioè l'incertezza su π devo averla almeno alla quarta cifra decimale: 3,xxx**X.** Il valore di π con 10 cifre s. è 3,1415926536….

In questo caso scelgo π= 3,141**6** infatti così si ha: $\Delta\pi/\pi$= 0,00005/3,1416=1,6 $\cdot 10^{-5} << 1{,}2 \cdot 10^{-3}$

La densità sarà $\rho=4\cdot 33{,}1520/(3{,}1416\cdot(1{,}415)^2\cdot 7{,}753)=2{,}7191688\ldots$; $\Delta\rho=2{,}719\times 1{,}22\times 10^{-3}$= 0.0033 [g/cm^3]

Quindi il risultato finale è: ρ = **2,7192** $\pm$ **0,0033 g/cm^3**. [… anche ρ = 2,719 $\pm$ 0,003 g/cm^3]

L2 – Massa Terra

La massa della Terra viene calcolata dalla formula $M_T = \frac{g \cdot (R_T)^2}{G}$, il raggio terrestre R_T e la costante di gravitazione universale vengono dati e si assumono senza incertezza, perché la loro incertezza relativa è molto minore di quella di g che deriva dalle vostre misure, quindi sarà trascurabile.

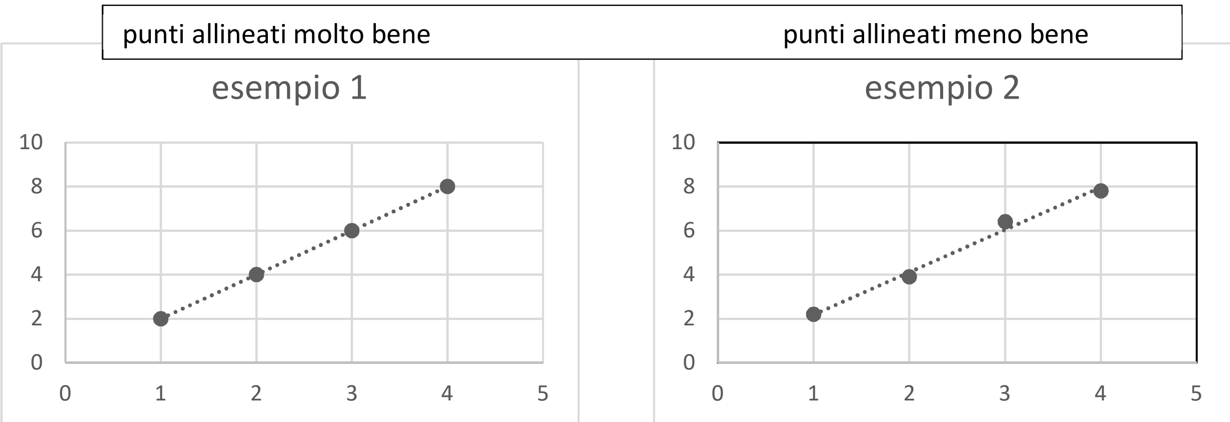
- L'incertezza relativa sulla massa della terra sarà quindi: $\frac{\Delta M_T}{M_T} = \frac{\Delta g}{g}$ da cui si ha: $\Delta M_T = M_T \frac{\Delta g}{g}$

Incertezze delle misure dirette

- Allungamento x della molla: (sono **due** misure, x è la differenza fra il punto iniziale e il punto finale), quindi l'incertezza letta sulla carta millimetrata va moltiplicata per due: Δx=2 Δ(carta millimetrata)$\cong$ 2 mm (tenendo conto che la misura non è molto precisa).
- Bilancia: è una bilancia meno precisa di quella utilizzata per la densità: LSD = 0,1 g Δm= 0,1 g.
- Cronometro a mano: il ΔT dello strumento sarebbe 0,01 s, ma è chiaro che l'incertezza sarà data dai vostri riflessi, quindi fate almeno 3-5 misure e regolatevi di conseguenza.

Poi vengono fatti i grafici… si calcola **k** dal grafico di (**m vs T^2**); poi **g** dal grafico di **(x vs m)**, e dal valore di **k** ottenuto con il primo grafico. Come valutare l'incertezza Δg da attribuire al valore di g?

- Valutazione dell'incertezza sul valore di g calcolato dalle vostre misure: il valore di g deriva da due grafici, in cui le incertezze principali sono: 1) Nella misura degli allungamenti della molla: sarà circa Δx$\cong$ 2 mm. 2) Nella misura dei periodi di oscillazione: valore tipico ΔT_{10} ~0,2-0,3-0,4 s (è soggettivo, dipende da voi). Le incertezze sulla misura delle masse sono trascurabili avendo voi utilizzato una bilancia digitale che vi permette di trascurare le incertezze rispetto alle altre fatte durante le misure. L' incertezza su g dipenderà dalla qualità dei grafici, in particolare da quello meno preciso, che sarà quello delle masse in funzione del periodo di oscillazione al quadrato.



Avrete due casi possibili: punti allineati molto bene: esempio 1, oppure punti allineati meno bene: esempio 2. Notate che il fatto che i punti siano allineati o no non influenza molto il risultato della misura, che può essere corretto o no anche in dipendenza di altre considerazioni, influisce solo sulla valutazione dell'incertezza casuale dovuta alle misure.

Incertezza relativa per $\frac{\Delta g}{g}$: Caso 1 = 5% = 0,05 ; Caso 2 = 10% ÷ 20% = 0,10 ÷ 0,20 (usate il buon senso)

Esempio numerico:

Valore di M_T (calcolato utilizzando il valore di g ottenuto dalle misure) = 5,68236 $\cdot 10^{24}$ kg.

Punti allineati abbastanza male... $\frac{\Delta M_T}{M_T} = \frac{\Delta g}{g} = 20\% = 0{,}20$ Quindi: $\Delta M_T = M_T \cdot 0{,}20 = 1{,}1136 \cdot 10^{24}$ kg.

Questo valore si approssima tenendo solo due cifre significative, quindi $\Delta M_T = 1{,}1 \cdot 10^{24}$ kg.

Il valore finale della Massa della Terra sarebbe quindi: $\mathbf{M_T = 5{,}7 \pm 1{,}1 \cdot 10^{24}\ kg}$